Résumé 11 : TOPOLOGIE

$(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note d la distance associée. On note aussi $B(x,r)$ et $\bar{B}(x,r)$ les boules ouvertes et fermées.

Quand nous parlerons de l' espace vectoriel normé $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous supposerons toujours qu'il est muni de la valeur absolue.

---

1 Topologie d'un espace vectoriel normé

§ 1. ***Equivalence de normes.–*** Toutes les notions topologiques que nous définirons (comme ouvert, fermé, compact, continue,...) dépendent de la norme choisie sur E (je vous encourage à revoir le résumé sur les normes à ce propos). Cependant, elles sont invariantes si on remplace la norme par une norme qui lui est équivalente. Or, lun des théorèmes centraux de ce cours est le suivant :

Théorème 1.1

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Ainsi, dans un espace de dimension finie E, la phrase "Ω est ouvert", ou "K est compact", a un sens sans que l'on ait besoin de préciser une norme. C'est absolument faux en dimension infinie où des parties de E peuvent être ouvertes pour une normes N_1 et ne pas l'être pour une norme N_2.

§ 2. ***Ouverts et Fermés.–*** On généralise ici certaines propriétés des intervalles ouverts ou fermés.

Définition 1.2 (*Voisinage, point intérieur, ouvert*)

- *Soit V une partie de E et $a \in E$. On dit que V est* **un voisinage de** *a, ou que a est* **un point intérieur à** *V, lorsque V contient une boule ouverte de centre a.*
- *Une partie Ω de E est dite* **ouverte** *lorsqu'elle est un voisinage de chacun de ses points, i.e lorsque pour tout $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \Omega$.*
- *Une partie F de E est* **fermée** *lorsque F^c est ouvert.*

Exemples :

1. Les intervalles du type $]a,b[$ avec $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, sont des ouverts.
2. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des points intérieurs à $]a,b]$ est $]a,b[$. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie, le segment $[0,1] \times \{0\}$ n'admet aucun point intérieur.
3. Les boules ouvertes sont des ouverts. La réciproque est fausse, mais tout ouvert est une union de boules.
4. $]0,1]$ n'est ni ouvert, ni fermé.
5. Les boules fermées, les sphères et les ensembles finis sont fermés.

Enonçons quelques propriétés des ouverts et des fermés :

(i) E et $\emptyset$ sont ouverts et fermés.

(ii) La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert. L'intersection d'une famille FINIE d'ouverts est un ouvert.

(iii) L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé. La réunion d'une famille FINIE de fermés est un fermé.

Théorème 1.3 (*Caractérisation séquentielle des fermés*)

Une partie F de E est fermée $\Longleftrightarrow$ toute limite de suite convergente d'éléments de F appartient à F.

§ 3. ***Intérieur, adhérence.–*** Grâce à ces propriétés, on peut définir :

Définition 1.4

Soit $\Omega \subset E$.

- *On appelle* **intérieur** *de Ω et on note $\mathring{\Omega}$ la réunion de tous les ouverts de E contenus dans Ω. $\mathring{\Omega}$ est l'ensemble de tous les points intérieurs à Ω. Ainsi, $\mathring{\Omega}$ est le plus grand ouvert de $(E.\|.\|)$ contenu dans Ω.*
- *On appelle* **adhérence** *de Ω et on note $\bar{\Omega}$ l'intersection de tous les fermés de E contenant Ω. Les points de E appartenant à $\bar{\Omega}$ sont appelés* **points adhérents** *à Ω.*
  $\bar{\Omega}$ est donc le plus petit fermé contenant Ω.
- *On appelle frontière de A l'intersection entre son adhérence et l'adhérence de son complémentaire.*

Exemples :

- L'intérieur de $\overline{B}(x_0, r)$ est $B(x_0, r)$.
- L'adhérence de A^c est le complémentaire de $\mathring{A}$.
- L'intérieur de A^c est le complémentaire de $\bar{A}$.

- Soient A, B deux parties de E.
  (i) $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.
  (ii) $\mathring{A} = A \iff A$ est un ouvert, et $\bar{A} = A \iff A$ est un fermé.
  (iii) Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
  (iv) $x \in \bar{A} \iff$ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point de A à une distance $\leqslant \varepsilon$ de x. $\iff$ Il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.
- Une partie de E est dite **dense dans** $(E, \|.\|)$ lorsque $\bar{A} = E$.

Exemples :

- $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Limites et Continuité

On se donne ici deux espaces vectoriels normés E et F, et une partie non vide A de$E$.
Soit $a \in \bar{A}$. Nous avons défini les voisinages de a dans A. On parlera aussi de voisinages de $+\infty$, de $-\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$.

§ 1. ***Limite en un point adhérent.–*** On étend naturellement la définition de la limite d'une fonction de la variable réelle.

Définition 2.1

Soit $f : A \to F$. Soit $a \in \bar{A}$ et $\ell \in F$. On dit que f tend vers ℓ en a lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in A, \|x - a\| \leqslant \alpha \implies \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$.
C'est équivalent à dire que pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe un voisinage V_a de a dans E tel que $f(V_a \cap A) \subset V_\ell$.
Ce vecteur ℓ, lorsqu'il existe, est unique et est appelé limite de f en a. On note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Remarques :

- La dernière formulation est celle qui permet de définir les limites infinies.
- Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée sur un voisinage de a.
- On a une formulation séquentielle de la limite : $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff$ Pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

§ 2. ***Continuité et conservation de la topologie.–***

Définition 2.2

Soit $f : A \to F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
f est dite continue sur A lorsqu'elle l'est en tout point de A. On note $\mathscr{C}^0(A, F)$ l'ensemble de ces fonctions.

Remarques :

- C'est une définition locale, i.e que f est continue en $a \iff$ il existe un voisinage de a dans A tel que la restriction de f à ce voisinage est continue en a.
- On peut décliner dans ce cadre les propriétés énoncées pour les limites :
  - f est continue en $a \iff$ pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite $f\big(x_n\big)$ converge vers $f(a)$.
  - $\mathscr{C}^0(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(A, F)$.
  - Si f est continue sur A et si g est continue sur une partie B de F contenant $f(A)$, alors $g \circ f$ est continue sur A.
  - $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$ est stable par produit.
  - Si $f \in \mathscr{C}^0(A, E)$ et $\lambda \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$, alors $\lambda.f \in \mathscr{C}^0(A, E)$.
  - Si $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$ ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{C})$.

Exemples :

1. Les applications Lipschitziennes sont continues.
2. Les applications coordonnées dans $\mathbb{K}^n$, ou les applications "composantes" dans n'importe quelle base d'un espace vectoriel de dimension finie.
3. Les fonctions polynomiales en les composantes de la variable dans une base, comme le déterminant, ou la trace.
4. La norme $\|.\|$ sur $(E, \|.\|)$.
5. Pour toute partie $A \subset E$ non vide, l'application $d(., A)$ car elle est $1-$Lipschitzienne.
6. $f : x \in A \to \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n$ est continue $\iff$ tous les f_i le sont.

Théorème 2.3

Soit A une partie non vide de E et $f : A \to F$. Alors, il y a équivalence entre :
(i) f est continue sur A.
(ii) L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de A.
(iii) L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de A.

Exemples :

- Pour toute fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\{x \in A | f(x) = y\}$ est un fermé de A, ainsi que $\{x \in A | f(x) \geqslant y\}$ et $\{x \in A | f(x) \leqslant y\}$. De même, $\{x \in A | f(x) > y\}$ et $\{x \in A | f(x) < y\}$ sont des ouverts de A.
- $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert. $SL_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Théorème 2.4

Soient $f, g : A \to F$ continues sur A. S'il existe $B \subset A$, dense dans A tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in B$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$.

§ 3. ***Continuité uniforme sur A.***— A mettre en parallèle avec la continuité sur A.

Définition 2.5

$f : A \to F$ est uniformément continue lorsque

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, \|x - y\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques :

- C'est donc une propriété globale. Evidemment, toute application continue est uniformément continue, mais la réciproque est fausse.
- Pour montrer que f est ou n'est pas uniformément continue, on utilisera l'équivalence entre
  (i) f est uniformément continue.
  (ii) Pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A, si $x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
- Les fonctions Lipschitziennes sont uniformément continues.

§ 4. ***Continuité d'applications linéaires.***— La continuité des applications linéaires relève du tout ou rien : une application linéaire est continue nulle part ou partout.

Nous noterons $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F qui sont continues. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E, F)$.

Proposition 2.6

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. on a équivalence entre

(i) f est continue.
(ii) f est continue en 0_E.
(iii) $\boxed{\text{Il existe } C > 0 \text{ telle que pour tout } x \in E, \|f(x)\| \leqslant C\|x\|.}$
(iv) f est Lipschitzienne.
(v) f est uniformément continue.
(vi) f est bornée sur la boule unité fermée de centre 0_E est de rayon 1.

Remarques :

Pour montrer que f n'est pas continue, on trouvera une suite (x_n) bornée telle que $\big(f(x_n)\big)$ ne l'est pas.

3 Compacité

§ 1. ***Suites d'un compact.***— On prend ici la propriété de Bolzano Weierstrass pour une définition :

Définition 3.1

On dit d'une partie K de E qu'elle est **compacte**, *ou qu'elle vérifie la* **propriété de Bolzano-Weierstrass**, *lorsque toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence, i.e si $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$, alors il existe $\ell \in K$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.*

Ainsi, $[a, b]$ est un compact, ainsi que toute partie finie de E. $[a, b[$ et $B(0_E, 1)$ ne le sont pas.

Proposition 3.2

(i) Si K est compacte, K est fermée et bornée.
(ii) Si K est compacte, une partie F de K est compacte $\Longleftrightarrow$ F est fermée.

Nous utiliserons très souvent, notamment pour prouver que la convergence absolue d'une série entraine sa convergence :

Proposition 3.3

Soit K un compact et (u_n) une suite dont l'image est dans K. On a équivalence entre :

(i) (u_n) converge.
(ii) (u_n) admet <u>exactement</u> une valeur d'adhérence.
(iii) (u_n) admet au plus une valeur d'adhérence.

§ 2. ***Continuité et compacité.***— Ce qui va nous fournir de nombreux exemples de compacts.

Proposition 3.4

Soit f une fonction continue définie sur une partie compacte A d'un espace vectoriel normé. Alors,

(i) f est uniformément continue.

(ii) $f(K)$ est compact.

(iii) f est bornée et si elle est à valeurs réelles, elle atteint ses bornes.

4 Connexité par arcs

Définition 4.1 (*Chemin continu joignant deux points*)

Soient deux points $a, b \in E$. On appelle **chemin continu de** a **à** b *toute application continue $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*
Soit Ω une partie non vide de E. On appelle composantes connexes de Ω les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence.
Ω est dite **connexe par arcs** *lorsqu'elle ne contient qu'une seule composante connexe.*

Le programme dit : "dans les cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs".

Exemples :

- Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Les parties convexes et les parties étoilées sont connexes par arcs.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, mais $\mathbb{C}^*$ l'est.

Généralisons le théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 4.2

Si une partie Ω d'un espace vectoriel normé E est connexe par arcs, et si $f : \Omega \to F$ est continue, alors $f(\Omega)$ est connexe par arcs.

5 Cas de la dimension finie

- L'application $\left|\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}\right.$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{K})$.
- La convergence d'un suite dans $\mathbb{R}^n$ est équivalente à celle de chacune de ses coordonnées.
- Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé quelconque est fermé.
- **Théorème 5.1**

  Soit E un espace vectoriel normé <u>*de dimension finie*</u>*. Alors,*

  (i) Une partie K de E est compacte $\Longleftrightarrow$ elle est fermée et bornée.

  (ii) De toute suite bornée dans E, on peut extraire une suite convergente.

  (iii) Une suite d'éléments de E converge $\Longleftrightarrow$ elle est bornée et admet exactement une valeur d'adhérence.

  (iv) Soit F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel . Toute $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est continue.
- Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ un produit d' espaces vectoriels de dimension finie et F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel . Toute application $p-$linéaire de E dans F est continue. Ainsi, par exemple, les produits scalaires, le produit vectoriel, la multiplication dans l'espace des matrices, la multiplication par un scalaire, les applications $A \longmapsto A^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

6 Retour sur les séries

§ 1. ***Convergence absolue.***— Enfin la preuve :

Théorème 6.1 (*CVA $\Longrightarrow$ CV*)

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Fixons-nous une norme $\|.\|$ sur E. Alors si la série $\sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

§ 2. ***Exponentielle et inverse.***— Une norme $\|.\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite sous-multiplicative lorsque pour toutes matrices A, B on a $\|A \times B\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$. Il en existe, par exemple, $\|A\| = n \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$.

Théorème 6.2

On se fixe une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit aussi $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$,

(i) la série $\sum_{p\geqslant 0} A^p$ converge.

(ii) $I_n - A$ est inversible, et si on note $B = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} A^p$, $B = (I_n - A)^{-1}$.

Définition 6.3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum A^p/p!$ converge.

On appelle exponentielle de A la matrice $\exp A = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$.

Propriétés 6.4

(i) Si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

(ii) Pour toute matrice A, la matrice $\exp A$ est inversible et $\exp(-A) = \big(\exp A\big)^{-1}$.

ANNEXE

A Les figures imposées

► ***CCP Analyse 45***

1. Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
   (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On pose $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

► ***CCP Analyse 54*** Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||\,.||$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\displaystyle\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose alors $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

B Les preuves à connaitre...

► Le théorème 6.2.
► $GL_n(\mathbb{R})$ est dense et ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
► Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on a équivalence entre :
   (i) f est continue.
   (ii) il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant C\|x\|$.
   (iii) f est Lipschitzienne.